

Subloading  $t_{ij}$  model の陰解法計算アルゴリズム (その2)

地域 地盤 環境研究所 ・ 中部大学 ○中井 照夫  
Islamic University of Technology H.M. Shahin  
JIP テクノサイエンス 高橋 寛臣 ・ 戸田 圭彦

前報<sup>1)</sup>で Subloading  $t_{ij}$  model の陰解法のアルゴリズムを紹介したが、その後基本的な定式化は同じであるが、材料パラメータをより決めやすくする改良を行ったので、改良点を含め return mapping の algorithm を紹介すると共に、解析結果を示す。なお、Subloading  $t_{ij}$  model<sup>2)</sup>の特徴は、三軸圧縮条件下で決めた材料パラメータで異なる3主応力下の土の挙動が説明できることと( $t_{ij}$  の概念<sup>3)</sup>)、緩い土から締まった土まで、練り返した土から自然堆積土まで、共通の材料パラメータで説明できることである(状態変数として密度 $\rho$  およびボンディング $\omega$  の導入と下負荷面<sup>4)</sup>)。

1. Subloading  $t_{ij}$  model<sup>1)</sup>の基本式

モデルは既往の応力パラメータ( $p, q$ )ではなく、修正応力 $t_{ij}$ に基づく応力パラメータ( $t_N, t_S$ )で降伏関数 $f=0$ を作り、その空間で流れ則を仮定する。また、関連流動則を仮定して計算される塑性体積ひずみ増分と同じになる条件下で、塑性ひずみ増分を関連流動則成分(AF) と等方圧縮成分(IC)に分けることにより、塑性流動方向の応力経路依存性を表現している<sup>5)</sup>(Fig. 1(a)参照)。また、このモデルでは、Fig. 1(a)に示すように、降伏関数は圧縮応力内だけで定義でき、且つ如何なる弾性ひずみが生じて引張り応力が生じない弾性式<sup>6)</sup>を用いているので、理論上引張り応力が生じない構成モデルとなっている。これらの特徴を考慮した Subloading  $t_{ij}$  model の基本式は増分形で次式のように表せる<sup>5)</sup>。

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = d\gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kk}} + L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} \quad (1)$$

$$\bullet d\varepsilon_v^p = d\gamma \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad (2)$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} d\gamma \quad (3)$$

$$\bullet d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3}Q \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| d\gamma \quad (4)$$

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad (5)$$

where

$$F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta \quad (6)$$

$$\left( \text{where } X = t_S/t_N \right)$$

$$H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \quad (7)$$

$$L^{(IC)} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^2 \left/ \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ 1 + \left\langle \frac{G}{(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)} \right\rangle \right\} \right. \quad (8)$$

$$G = a\rho, \quad Q = b\omega \quad (9)$$

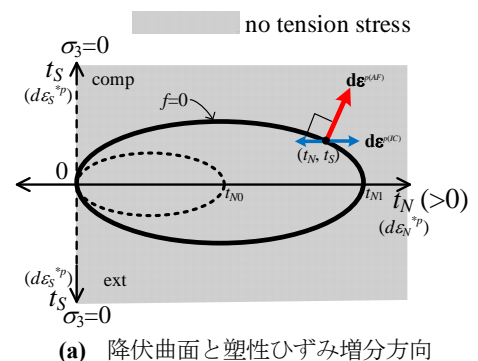
前報<sup>1)</sup>から変更した点は、(3)式および(4)式の状態変数 $\rho$  および $\omega$  の発展則である。 $\rho$  および $\omega$  は塑性ひずみの発生とともにゼロに近づき、それらの値が大きいほど近づき方は早くなると考えられる。このような条件は、 $G$  および $Q$  を(9)式に示すように、 $G(0)=0, Q(0)=0$  を満たす単調増加関数で与えることで表現できる。また、(1)式において、右辺の第2項と第3項の trace をとると常にゼロとなるので、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$  を(AF)および(IC)成分に分割しているものの、分割しない(すべての塑性ひずみ増分が(AF)成分)場合と塑性体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v^p$  は変わらない。その結果、塑性体積ひずみ増分は常に(2)式で計算される。これらの工夫により、簡単且つ安定的な陰解法の定式化が可能となる。

## 2. Return mapping アルゴリズム

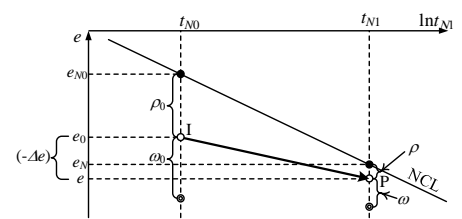
現状態を  $n$  step,  $\Delta \varepsilon$  のひずみ増分を与えたときの状態を  $n+1$  step とする。以後、 $n$  step および初期状態は下添字  $n, 0$  で、 $n+1$  step は下添字なしで表す。上添字の  $e, p$  および(trial) は弾性成分、塑性成分および弾性を仮定する試行状態を意味する。ここに、 $\Delta \varepsilon^p = \varepsilon^{e(trial)} - \varepsilon^e$  と表せるので、 $n+1$  step での陰的關係式として以下の式が得られる。なお、ボールド体の記号はベクトルあるいはテンソル成分を意味する。

キーワード：地盤材料、弾塑性モデル、陰解法、Return mapping、3次元応力、 $t_{ij}$  の概念

連絡先：〒464-0856 名古屋市千種区吹上 1-1-8-706、(株)地域 地盤 環境研究所 名古屋事務所



(a) 降伏曲面と塑性ひずみ増分方向



(b)  $e$ - $\ln t_{N1}$  関係

Fig. 1 Subloading  $t_{ij}$  model の説明図

$$\bullet \mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eq. (1)}) \quad (10)$$

$$\bullet b_2 = \rho - \rho_n - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho/(1+k_a X) + Q/(1+k_b X)}{t_N} \right\} = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eqs. (3) and (9)}) \quad (11)$$

$$\bullet b_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr} \mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eqs. (2) and (5)}) \quad (12)$$

ボンディング効果を表す $\omega$ については、(4)式が $\omega$ と $\gamma$ に関する微分方程式なので、積分することにより、次式で $\omega$ は与えられる。その結果、(3)式の $Q$ は $Q=b\omega$ で直接的に計算される。

$$\omega = \omega_n \exp \left( -b(1+e_0)\sqrt{3} \left\| \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} \right\| \Delta\gamma \right) \quad (13)$$

(10)~(12)式は $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\rho$ を未知数とする非線形連立方程式とみなすことができる。すなわち、

$$\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \quad \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (\boldsymbol{\varepsilon}^e \ \Delta\gamma \ \rho)^T \text{としたとき、} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{をNewton法で解くことになる。}$$

また、試行弾性状態を含め弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ から応力を求めるには、弾性ひずみと応力が一意的に決まる弾性式が必要であるが、引張り応力が発生せず地盤材料の非線形弾性挙動を説明できる弾性モデル $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ を使って計算できる。弾性モデルの詳細は文献<sup>6)</sup>を参照のこと。

実際の計算は以下のプロセスを繰り返す。

- ① n step から $\Delta\varepsilon$ のひずみ増分を与えたn+1 step の $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  (弾性式から $\boldsymbol{\sigma}$ も求められる),  $\Delta\gamma$ ,  $\rho$ をNewton法で求める。
- ②  $\Delta\gamma > 0$ に時は上述の $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\rho$ となる。 $\Delta\gamma \leq 0$ の時は弾性状態なので、試行弾性で求めた $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ が解となる。
- ③ 下負荷面の考え方では、降伏曲面は常に現応力を通るので、弾性・弾塑性に拘わらずFig. 2(b)の関係を使ってn+1 step の $\rho$ を設定する (弾塑性状態であれば上述の $\rho$ と同じ)。
- ④ n+1 step の $\omega$ については、弾塑性状態であれば(13)式で、弾性状態であれば $\omega = \omega_n$ で不変とする。

### 3. 解析結果

平面ひずみ条件下で且つ等方応力状態( $p=98\text{kPa}$ )から軸圧縮と単純せん断の2種類の変形パターンで解析を行った(Fig. 2参照)。両者は主応力方向が異なるだけで同じ解析条件である。地盤材料として、正規圧密土( $\rho_0=0.0$ ,  $\omega_0=0.0$ )、過圧密土( $\rho_0=0.1$ ,  $\omega_0=0.0$ )、自然堆積土( $\rho_0=0.1$ ,  $\omega_0=1.0$ )の藤森粘土を想定した。材料パラメータをTable 1に示す。Figs. 3に解析結果を示す。(a)図は偏差応力 $q$ ~偏差ひずみ $\varepsilon_d$ 関係を、(b)図は偏差応力 $q$ ~平均主応力 $p'$ 関係で表した応力経路図である。また、図中、白抜き(○)は塑性ひずみがすべて関連流動則成分とした時の結果(AF)であり、塗りつぶし(●)は等方圧縮成分も考慮した結果(AF+IC)である。応力~ひずみ関係はこれらの考慮により差があるが、応力経路は考慮の有無に拘わらず一義的に決まる。なお、これらの結果は陽解法の結果と一致する。

今後現有のFEMtijプログラム本体および汎用プログラムPLAXISの外部サブルーチン(UDSM)に組み込む予定である。

Table 1 材料パラメータ

$\lambda$	0.104	Same parameters as Cam clay model
$\kappa$	0.010	
$e_{NC}$ at $p=98\text{ kPa}$ & $q=0\text{ kPa}$	0.83	
$R_{cs} = (\sigma'_v/\sigma'_s)_{c(comp)}$	3.5	Shape of yield surface
$v_e$	0.2	
$\beta$	1.5	Influence of density and confining pressure
$a$	100	
$k_a$	8	Influence of bonding
$b$	10	
$k_b$	3	

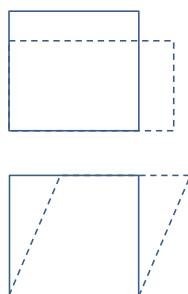


Fig. 2 変形パターン

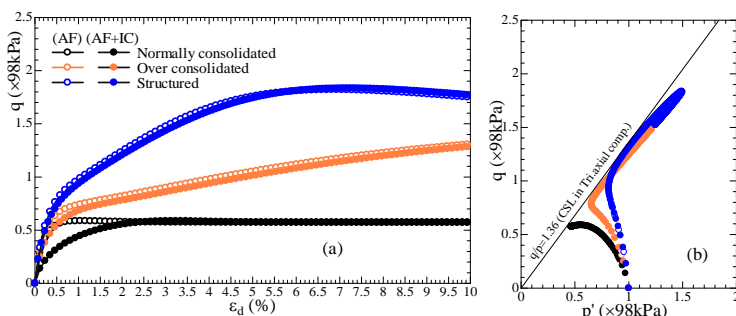


Fig. 3 平面ひずみ等体積せん断の解析結果

### 文献

- 1) 中井・Shahin (2019): Subloading tij model の陰解法計算アルゴリズム, 第54回地盤工学研究発表会, 269-270
- 2) Nakai et al., (2011): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, 51(6), 1149-1168. もしくは Nakai (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press,
- 3) Nakai・Mihara (1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, 24(2), 82-94.
- 4) Hashiguchi (1980): Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, *Jour. of Appli. Mech.*, ASME, 102(2), 266-272.
- 5) 中井・Shahin (2017): 2重硬化(Double Hardening)則を用いない塑性流動方向の応力経路依存性の表現, 第52回地盤工学研究発表会, 307-308. もしくは Nakai・Shahin (2019): A simple method to describe stress path dependency of plastic flow, *Proc. of 16th ARCSMGE*, Taipei, SF01M-010006
- 6) 中井・Shahin・石川 (2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, 第53回地盤工学研究発表会, 369-370. もしくは Nakai・Shahin・Ishikawa (2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow, 15003